(فرم گرد سوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضي

گروه آموزشی : **ریاضي**	امتحان درس : **توابع مختلط**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۱-۱۳۹۰**	نام مدرس: **سیدرضا موسوي**
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۰/۱۰/۲۶**	وقت : **۱۵۰** دقیقه

توجه :

اين سوالات با مداد نوشتاري نماييد.

در طول برگزاري امتحان به هيچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- تمام ریشه‌های (صفرهای) تابع $f(x)=e^{\sqrt{z}}-i$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال۲- تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ ناحیه $D_1=\{z:|z|<1\}$ را به ناحیه $D_2=\{z:|z|>1\}$ می نگارد و بر عکس ناحیه D_2 را به ناحیه D_1 می نگارد. یک تابع خطی-کسری دیگر بنویسید که همین ویژگی را داشته باشد. **۱۰ نمره**

سوال۳- فرض کنید $a>0$ و $C=\{z:|z|=a\}$ ، انتگرالهای $\int_C \frac{dz}{z}$ و $\int_C \frac{dz}{\bar{z}}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- فرض کنید $R>0$ ، $D=\{z:|z|\le R\}$ و تابع f روی D تحلیلی و کراندار است.
ثابت کنید : $|f^{(n)}(0)|\le n!\,M/R^n$ **۱۵ نمره**
($M>0$ یک کران بالا برای f روی D است.)

سوال۵- مانده تابع $f(z)=z^{-6}e^{z^2}\tan z$ را در قطب $z=0$ ، به کمک سری لوران محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- انتگرال $\oint_{|z|=4}\frac{z^{90}}{(z^4+4)^{10}(z^2+2)^{26}}dz$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

(راهنمایی : این انتگرال به چند روش حل می شود. یکی از روشها استفاده از تغییر متغیر $z=\frac{1}{w}$ است.

سوال۷- انتگرال مثلثاتی $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال ۸- انتگرال ناسره $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱ - $e^{\sqrt{z}}-i=0\to e^{\sqrt{z}}=i=e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})i}\ ,\ k\in Z\to\sqrt{z}=(2k\pi+\frac{\pi}{2})i\,,k\in Z\to z=-(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2\ ,\ k\in Z$

جواب سوال ۲ - تابع $g(z)=\frac{-1}{z}$ یک جواب مساله است.

تعداد چنین توابعی نامتناهی است. اگر α عددی حقیقی و $|w|<1$ آنگاه تابع $g(z)=e^{\alpha i}\frac{\overline{w}z-1}{z-w}$ خاصیت مورد نظر را دارد.

جواب سوال ۳ - حل مستقیم : $\int_C\frac{dz}{z}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{a\,i\,e^{i\theta}d\theta}{ae^{i\theta}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}i\,d\theta=2\pi i$ به کمک قضیه انتگرال کوشی هم قابل حل است.

انتگرال دوم به کمک قضیه ها قابل حل نیست.حل مستقیم : $\int_C\frac{dz}{\overline{z}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{a\,i\,e^{i\theta}d\theta}{ae^{-i\theta}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}i\,e^{2i\theta}d\theta=\frac{1}{2}e^{2i\theta}\,|_{\theta=0}^{2\pi}=0$

جواب سوال ۴ - طبق تعمیم قضیه انتگرال کوشی داریم $f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}dz$ زیرا f روی مرز $|z|=R$ و ناحیه درون آن تحلیلی است و $z=0$ درون مرز $|z|=R$ قرار دارد. اکنون داریم

$$|f^{(n)}(0)|=|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}dz|\le\frac{n!}{2\pi}\times\frac{M}{R^{n+1}}(2\pi R)=n!\times\frac{M}{R^n}$$

جواب سوال ۵ - تابع $\tan z$ در $z=0$ دارای سری تیلور $\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{15}+\cdots$ است که سه جمله اول آن را به روشهای مختلف می توان پیدا کرد. سری مک لورن تابع e^{z^2} نیز شناخته شده است : $e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{6}+\cdots$

در نتیجه : $f(z)=z^{-6}e^{z^2}\tan z=z^{-6}(1+z^2+\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{6}+\cdots)(z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\cdots)=z^{-5}+\frac{4}{3}z^{-3}+\frac{29}{30}z^{-1}+\cdots$

پس مانده تابع $f(z)=z^{-6}e^{z^2}\tan z$ در قطب مرتبه پنجم $z=0$ برابر $29/30$ است.

جواب سوال ۶ – روش اول : تابع $f(z)=\frac{z^{90}}{(z^4+4)^{10}(z^2+2)^{26}}$ درون دایره $|z|=4$ ، ۶ قطب با مرتبه های ۱۰ یا ۲۶ دارد که محاسبه مانده در آنها امکانپذیر ولی بسیار سخت است.

روش دوم : چون تابع $g(z)=\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=\frac{1}{(1+4z^4)^{10}(1+2z^2)^{26}}$ در $z=0$ قطب ندارد پس تابع $f(Z)$ قطب در بی نهایت ندارد و تمام قطبهای آن درون مسیر انتگرالگیری واقع هستند که نتیجه می دهد مقدار انتگرال برابر صفر است.

روش سوم : با تغییر متغیر $z=\frac{1}{w}$ داریم : $\oint_{|z|=4}\frac{z^{90}}{(z^4+4)^{10}(z^2+2)^{26}}dz=\oint_{|w|=\frac{1}{4}}\frac{-dw}{(1+4w^4)^{10}(1+2w^2)^{26}}=0$

زیرا تابع $g(w)=\frac{1}{(1+4w^4)^{10}(1+2w^2)^{26}}$ روی مسیر $|w|=\frac{1}{4}$ و درون آن تحلیلی است.

جواب سوال ۷ - داریم $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}\ ,\ d\theta=\frac{dz}{i\,z}$

بنابر این $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}=\int_{|z|=1}\frac{dz/i\,z}{(\sqrt{2}+(z^2+1)/2z)^2}=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^2+2\sqrt{2}z+1)^2}=\frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z+\sqrt{2}+1)^2(z+\sqrt{2}-1)^2}$

تابع درون انتگرال دو قطب مرتبه دوم در نقاط $z_1=-\sqrt{2}+1$ و $z_2=-\sqrt{2}-1$ دارد که z_2 خارج از مسیر انتگرالگیری و z_1 درون مسیر قرار دارد. مانده تابع در قطب z_1 برابر است با

$$b_1=\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z+\sqrt{2}+1)^2}=\lim_{z\to-\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{(z+\sqrt{2}+1)^2}-\frac{2z}{(z+\sqrt{2}+1)^3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{2(-\sqrt{2}+1)}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

پس در نهایت داریم : $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}=\frac{4}{i}\times 2\pi i\times\frac{\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}\,\pi$

جواب سوال ۸ - روش اول : ابتدا با تغییر متغیر $x=u^2$ داریم : $\int_{x=0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}=\int_{u=0}^{\infty}\frac{2du}{1+u^4}=2\int_{u=0}^{\infty}\frac{du}{1+u^4}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^4}$

سپس انتگرال مختلط $\int_C\frac{dz}{1+z^4}$ را در نظر می گیریم. این انتگرال روی مسیر شناخته شده C، شامل نیمدایره C_M به مرکز مبدا مختصات و به شعاع $M>1$ واقع در نیمصفحه بالایی دستگاه مختصات و قطر آن ، C' ، که بر محور xها واقع است حل می شود. تابع $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ دارای چهار قطب ساده است که قطبهای $z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ و $z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ درون مسیر و دو قطب دیگر آن خارج از مسیر قرار دارند. مانده تابع $f(z)$ در این دو قطب به ترتیب برابر است با :

$$b_1=\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{1+z^4}=\lim_{z\to z_1}\frac{z}{4z^4}=\frac{-1}{4\sqrt{2}}(1+i)\quad\text{و}\quad b_2=\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{1+z^4}=\lim_{z\to z_2}\frac{z}{4z^4}=\frac{-1}{4\sqrt{2}}(-1+i)$$

یعنی $b_1+b_2=\frac{-i}{2\sqrt{2}}$ و در نتیجه $\int_C\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i\times\frac{-i}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ پس $\int_C\frac{dz}{1+z^4}=\int_{C'}\frac{dz}{1+z^4}+\int_{C_M}\frac{dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

اکنون اگر $M\to\infty$ آنگاه $\int_{C_M}\frac{dz}{1+z^4}\to 0$ و $\int_{C'}\frac{dz}{1+z^4}\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^4}$ در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^4}=\int_{x=0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

روش دوم : داریم : $\int_{x=0}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}=\int_{x=0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{1+x^2}=\int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx}{1+x^2}$

انتگرال $\int_C\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}dz}{1+z^2}$ را روی مسیر شبیه جاکلیدی به دو روش حل می کنیم. مسیر $\int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx}{1+x^2}$ شامل دو مسیر دایره ای C_M و C_ε است که $M>1$ و $0<\varepsilon<1$. اگر $M\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ انتگرال روی این دو مسیر به صفر همگراست.

$$\int_{C_1}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}dz}{1+z^2}=\int_\varepsilon^M\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln(re^{\alpha i})}(e^{\alpha i}dr)}{1+r^2e^{2\alpha i}}=e^{\frac{\alpha}{2}i}\int_\varepsilon^M\frac{r^{-\frac{1}{2}}dr}{1+r^2e^{2\alpha i}}=e^{\frac{\alpha}{2}i}\int_\varepsilon^M\frac{dr}{(1+r^2e^{2\alpha i})\sqrt{r}}\xrightarrow{\alpha\to 0}\int_\varepsilon^M\frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}$$

$$\int_{C_2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}dz}{1+z^2}=\int_M^\varepsilon\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln(re^{(2\pi-\alpha)i})}(e^{(2\pi-\alpha)i}dr)}{1+r^2e^{2(2\pi-\alpha)i}}=-e^{(\pi-\frac{\alpha}{2})i}\int_\varepsilon^M\frac{r^{-\frac{1}{2}}dr}{1+r^2e^{2(2\pi-\alpha)i}}$$

$$=-e^{(\pi-\frac{\alpha}{2})i}\int_\varepsilon^M\frac{dr}{(1+r^2e^{2(2\pi-\alpha)i})\sqrt{r}}\xrightarrow{\alpha\to 0}\int_\varepsilon^M\frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}$$

بنابر این اگر $M\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ آنگاه $\int_C\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}dz}{1+z^2}=2\int_0^\infty\frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}$. تابع $f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}}{1+z^2}$ دو قطب ساده $z_1=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ و $z_2=e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$ است که درون مسیر قرار دارند. مانده تابع $f(z)$ در این دو قطب به ترتیب برابر است با :

$$b_1=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}}{1+z^2}=\lim_{z\to z_1}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}}{2z}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2i}=\frac{-1-i}{2\sqrt{2}}\quad,\quad b_2=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}}{1+z^2}=\lim_{z\to z_2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}}{2z}=\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{-2i}=\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$$

یعنی $b_1+b_2=\frac{-i}{\sqrt{2}}$ و در نتیجه $\int_C\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln z}dz}{1+z^2}=2\int_0^\infty\frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}=2\pi i\times\frac{-i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\pi$ و بالاخره : $\int_0^\infty\frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$